

Interpolation mit periodischen Spline-Funktionen III

GERHARD MERZ

Gesamthochschule Kassel, Fachbereich 17-Mathematik,
D-3500 Kassel, Federal Republic of Germany

Communicated by G. Meinardus

Received August 1, 1980

1.

Bezeichnet man mit $\mathcal{L}_{N,\lambda}^m$ denjenigen beschränkten linearen Projektionsoperator, der jedem Element f aus dem Raum C_N der auf der reellen Achse stetigen Funktionen mit der Periode $N \in \mathbb{N}$, $N \equiv 1(2)$, den für fest vorgegebenes λ , $0 \leq \lambda < 1$, durch

$$s(v - \lambda) = f(v - \lambda) =: y_v, \quad v \in \mathbb{Z},$$

eindeutig festgelegten N -periodischen Spline s vom Grad $m \geq 1$, dessen Knoten in den ganzen Zahlen liegen, zuordnet, so bildet die Gesamtheit der auf diese Weise entstehenden interpolierenden Spline-Funktionen einen linearen Raum $S_{N,\lambda}^m$. Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, Aussagen über die L_2 -Norm des Operators $\mathcal{L}_{N,\lambda}^m: C_N \rightarrow S_{N,\lambda}^m$ zu gewinnen. Es zeigt sich, daß auch hier die bereits in [3], [4] unter Verwendung der durch

$$W := \frac{1}{\sqrt{N}} ((\zeta^{\mu\nu}))_{\mu, \nu=0}^{N-1}, \quad \zeta = \exp \frac{2\pi i}{N},$$

definierten diskreten Fourier-Transformation angegebene vektorielle Darstellung

$$q(t) = W^* Q(t) Q^{-1} (1 - \lambda) W y, \quad t \in [0, 1], \quad (1)$$

von s zu besonders übersichtlichen Ergebnissen führt. Hierbei ist

$$Q(t) := \text{diag } H_m(t, \zeta^\mu), \quad \mu = O(1)N - 1,$$

$$H_m(t, z) := (1 - z)^{m+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu (t + \nu)^m, \quad m \geq 0,$$

und

$$y := (y_1, \dots, y_N)^T.$$

Wir leiten zunächst einen expliziten Ausdruck für $\|\mathcal{L}_{N,\lambda}^m\|_2$ her, geben anschließend einen elementaren Beweis für die bekannten Aussagen

$$\|\mathcal{L}_{N,0}^{2k-1}\|_2 = \|\mathcal{L}_{N,1/2}^{2k}\|_2 = 1, \quad k \geq 1,$$

(vgl. Richards [6], Marsden–Mureika [1]) und wenden uns nach der Berechnung von $\|\mathcal{L}_{N,0}^{2k}\|_2$ vor allem einer detaillierten Untersuchung von $\|\mathcal{L}_{N,\lambda}^2\|_2$ zu. Den Abschluß bilden einige Bemerkungen über das Verhalten von $\|\mathcal{L}_{N,\lambda}^3\|_2$.

Mein herzlicher Dank gilt Herrn Prof. Dr. W. Sippel und Herrn stud. ing. K.-P. Groll für ihre Hilfe bei numerischen Rechnungen sowie bei der Herstellung der Abbildungen.

2.

Setzt man

$$A := [Q^{-1}(1 - \lambda)]^* \left[\int_0^1 Q^*(t) Q(t) dt \right] Q^{-1}(1 - \lambda) \tag{2}$$

und bezeichnet $\rho(A)$ den Spektralradius von A , so gilt nach (1)

$$\|\mathcal{L}_{N,\lambda}^m\|_2^2 = \sup_{\|y\|_2=1} y^* W^* A W y = \rho(A). \tag{3}$$

Aus

$$\frac{\partial}{\partial t} H_{m+1}(t, z) = (m + 1)(1 - z) H_m(t, z)$$

folgt ferner

$$(m + 1) \int_0^1 H_m(t, z) dt = H_{m+1}(1, z).$$

Wegen $\overline{H_m(t, z)} = H_m(t, \bar{z})$ ergibt sich daher durch m -malige partielle Integration

$$\int_0^1 H_m(t, e^{i\theta}) H_m(t, e^{-i\theta}) dt = \frac{(m!)^2}{(2m + 1)!} e^{-im\theta} H_{2m+1}(1, e^{i\theta})$$

und somit zusammen mit (2) und (3) unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften von $H_m(1, e^{i\theta})$

$$\|\mathcal{L}_{N,\lambda}^m\|_2^2 = \frac{(m!)^2}{(2m + 1)!} \max_{\theta = O(2\pi/N), (N-1)\pi/N} g_1(\theta, \lambda)$$

mit

$$g_1(\theta, \lambda) = \frac{e^{-im\theta} H_{2m+1}(1, e^{i\theta})}{e^{-im\theta} H_m(1 - \lambda, e^{i\theta}) H_m(\lambda, e^{i\theta})}. \quad (4)$$

Man beachte, daß in dieser Schreibweise im Zähler und Nenner von (4) reelle Funktionen der reellen Variablen θ stehen.

3.

Für $m = 2k - 1$ und $\lambda = 0$ ergibt (4)

$$\|\mathcal{L}_{N,0}^{2k-1}\|_2^2 = \frac{[(2k-1)!]^2}{(4k-1)!} \max_{\theta = O(2\pi/N) \leq \theta \leq (N-1)\pi/N} g_2(\theta, \lambda)$$

mit

$$g_2(\theta, \lambda) = \frac{e^{-i(2k-1)\theta} H_{4k-1}(1, e^{i\theta})}{e^{-i(2k-2)\theta} H_{2k-1}^2(1, e^{i\theta})} \quad (5)$$

und wegen $H_m(1, 1) = m!$ folgt sofort

$$\|\mathcal{L}_{N,0}^{2k-1}\|_2 \geq 1. \quad (6)$$

Nun gilt (vgl. [2]) für $w \neq 0$

$$H_m(t, e^{-w}) = (-1)^m (1 - e^{-w})^{m+1} e^{tw} \frac{\partial^m}{\partial w^m} \left(\frac{e^{-tw}}{1 - e^{-w}} \right). \quad (7)$$

Setzt man hier $t = 1$ und $w = -i\theta$, so wird

$$\begin{aligned} H_m(1, e^{i\theta}) &= \frac{(1 - e^{i\theta})^{m+1} e^{-i\theta}}{i^m} \frac{d^m}{d\theta^m} \left(\frac{1}{1 - e^{i\theta}} \right) \\ &= - \frac{(1 - e^{i\theta})^{m+1} e^{-i\theta}}{2i^{m+1}} \frac{d^m}{d\theta^m} \left(\cot \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

und (5) geht über in

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_{N,0}^{2k-1}\|_2^2 &= \frac{[(2k-1)!]^2}{(4k-1)!} \max_{\theta = O(2\pi/N) \leq \theta \leq (N-1)\pi/N} \\ &\quad - 2 \frac{(\cot \theta/2)^{(4k-1)}}{[(\cot \theta/2)^{(2k-1)}]^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Aus (8) entnimmt man nun sehr einfach

$$\|\mathcal{L}_{N,0}^{2k-1}\|_2 \leq 1; \tag{9}$$

dies ist nämlich gleichwertig mit

$$-2 \left(\cot \frac{\theta}{2}\right)^{(4k-1)} \leq \frac{(4k-1)!}{[(2k-1)!]^2} \left[\left(\cot \frac{\theta}{2}\right)^{(2k-1)}\right]^2, \quad 0 < \theta \leq \pi,$$

was wegen

$$\begin{aligned} \left(\cot \frac{\theta}{2}\right)^{(r)} &= 2(-1)^r r! \left\{ \frac{1}{\theta^{r+1}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(\theta - 2\nu\pi)^{r+1}} + \frac{1}{(\theta + 2\nu\pi)^{r+1}} \right] \right\} \end{aligned}$$

auf die offenbar richtige Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta^{4r}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(\theta - 2\nu\pi)^{4r}} + \frac{1}{(\theta + 2\nu\pi)^{4r}} \right] \\ \leq \left\{ \frac{1}{\theta^{2r}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(\theta - 2\nu\pi)^{2r}} + \frac{1}{(\theta + 2\nu\pi)^{2r}} \right] \right\}^2 \end{aligned}$$

führt.

Damit hat man nach (6) und (9) in Übereinstimmung mit Richards [6]

$$\|\mathcal{L}_{N,0}^{2k-1}\|_2 = 1.$$

4.

Setzt man in (4) $m = 2k$ und $\lambda = \frac{1}{2}$, so folgt

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_{N,1/2}^{2k}\|_2^2 &= \frac{[(2k)!]^2}{(4k+1)!} \max_{\theta = O(2\pi/N) \dots ((N-1)\pi/N)} \\ &\quad \times \frac{e^{-2ik\theta} H_{4k+1}(1, e^{i\theta})}{e^{-2ik\theta} H_{2k}^2(\frac{1}{2}, e^{i\theta})}, \end{aligned} \tag{10}$$

d.h. wie bei (6) zunächst

$$\|\mathcal{L}_{N,1/2}^{2k}\|_2 \geq 1.$$

Aus (7) ergibt sich für $t = \frac{1}{2}$ und $w = -i\theta$

$$H_m \left(\frac{1}{2}, e^{i\theta} \right) = - \frac{(1 - e^{i\theta})^{m+1} e^{-i\theta/2}}{2^{i^{r+1}}} \frac{d^m}{d\theta^m} \left(\frac{1}{\sin \theta/2} \right).$$

Die Beziehung

$$2 \left(\cot \frac{\theta}{2} \right)^{(4k+1)} \leq \frac{(4k+1)!}{[(2k)!]^2} \left[\left(\frac{1}{\sin \theta/2} \right)^{(2k)} \right]^2$$

läßt sich ähnlich wie oben mit Hilfe der Partialbruchzerlegungen der darin vorkommenden Funktionen verifizieren (vgl. Marsden-Mureika [1], Gl. (7)). Damit gilt

$$\|\mathcal{L}_{N,1/2}^{2k}\|_2 \leq 1,$$

d.h. insgesamt

$$\|\mathcal{L}_{N,1/2}^{2k}\|_2 = 1.$$

5.

Jetzt sei $m = 2k$ und $\lambda = 0$. Dann gilt nach (4)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_{N,0}^{2k}\|_2^2 &= \frac{[(2k)!]^2}{(4k+1)!} \max_{\theta = O(2\pi/N), ((N-1)\pi/N)} \\ &\quad \frac{e^{-2ik\theta} H_{4k+1}(1, e^{i\theta})}{e^{-i(2k-1)\theta} H_{2k}^2(1, e^{i\theta})}. \end{aligned} \quad (11)$$

Da für $k \geq 1$, $H_{2k}(1, -1) = 0$ und $H_{4k+1}(1, -1) \neq 0$ ist, folgt aus (11) zunächst

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\mathcal{L}_{N,0}^{2k}\|_2 = \infty.$$

Insbesondere erhält man für quadratische Splines ($k = 1$)

$$\|\mathcal{L}_{N,0}^2\|_2^2 = \frac{1}{30} \max_{\theta = O(2\pi/N), ((N-1)\pi/N)} \frac{33 + 26 \cos \theta + \cos 2\theta}{1 + \cos \theta} \quad (12)$$

und für Splines von Grad vier ($k = 2$)

$$\|\mathcal{L}_{N,0}^4\|_2^2 = \frac{1}{630} \max_{\theta = O(2\pi/N), ((N-1)\pi/N)} g_3(\theta, \lambda)$$

mit

$$g_3(\theta, \lambda) = \frac{78095 + 88234 \cos \theta + 14608 \cos 2\theta + 502 \cos 3\theta + \cos 4\theta}{122 + 143 \cos \theta + 22 \cos 2\theta + \cos 3\theta}.$$

Hieraus berechnet sich die folgende Tabelle:

N	$\ \mathcal{L}_{N,0}^2\ _2$	$\ \mathcal{L}_{N,0}^4\ _2$
1	1.00000000	1.00000000
3	1.14017543	1.03202682
5	1.46367699	1.16029832
7	1.85275236	1.34584286
9	2.27137524	1.56311900
11	2.70541195	1.79939604
21	4.96077762	3.10073640
31	7.26007070	4.47031156
41	9.57161454	5.86020228
51	11.88825717	7.25871679
101	23.49508647	14.29168823
501	116.46613586	70.75610230
1001	232.69480289	141.36231776
2001	465.15463410	282.57907537
3001	697.61501736	423.79679382
4001	930.07553532	565.01475058
5001	1162.53610444	706.23280104

Bemerkungen. (i) Die Beziehung (12) zeigt daß—im Gegensatz zu den von der L_1 - bzw. L_∞ -Norm bekannten Verhältnissen (vgl. [5])—die L_2 -Norm des periodischen Spline-Interpolationsoperators bei geradem Grad und Interpolation in den Knoten ($\lambda = 0$) nicht notwendig eine gebrochen rationale Zahl sein muß.

(ii) Numerische Untersuchungen lassen die Vermutung aufkommen, daß das Maximum in (11) jeweils für $\theta = (N - 1)\pi/N$ angenommen wird. Dies ist sicher dann der Fall, wenn die Funktion

$$F(\theta) := -2 \frac{(\cot \theta/2)^{(4k+1)}}{[(\cot \theta/2)^{(2k)}]^2}$$

—was für $k = 1$ (vgl. Abschnitt 6) und $k = 2$ tatsächlich zutrifft— für $0 \leq \theta < \pi$ streng monoton wächst. Letzteres ist gleichwertig mit dem Bestehen der Ungleichung

$$2 \left(\cot \frac{\theta}{2} \right)^{(2k+1)} \left(\cot \frac{\theta}{2} \right)^{(4k+1)} > \left(\cot \frac{\theta}{2} \right)^{(4k+2)} \left(\cot \frac{\theta}{2} \right)^{(2k)}, \quad 0 < \theta < \pi,$$

deren Nachweis für beliebiges $k \geq 1$ mir jedoch nicht gelungen ist.

6.

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Verhalten der L_2 -Norm des quadratischen Spline-Interpolationsoperators bei beliebiger äquidistanter Lage der Interpolationsstellen zwischen den Knoten. Aus (4) ergibt sich für $m = 2$ und $0 \leq \lambda < 1$

$$\|\mathcal{L}_{N,\lambda}^2\|_2^2 = \frac{1}{30} \max_{\theta=O(2\pi/N)} \max_{\theta=(N-1)\pi/N} g_4(\theta, \lambda) \quad (13)$$

mit

$$g_4(\theta, \lambda) = \frac{33 + 26 \cos \theta + \cos 2\theta}{(1 + 3\lambda^2 - 6\lambda^3 + 3\lambda^4) + (1 - 4\lambda^2 + 8\lambda^3 - 4\lambda^4) \cos \theta + \lambda^2(1 - \lambda)^2 \cos 2\theta}.$$

Wegen

$$g_4(0, \lambda) = 30, \quad g_4(\pi, \lambda) = \frac{1}{\lambda^2(1 - \lambda)^2}$$

gilt nach (13)

$$\|\mathcal{L}_{N,\lambda}^2\|_2 \geq 1.$$

Da der Zähler von $(\partial/\partial\theta)g_4(\theta, \lambda)$ gleich $-(30\lambda^4 - 60\lambda^3 + 30\lambda^2 - 1)(6 - 4 \cos \theta - 2 \cos^2 \theta) \sin \theta$ ist, bestimmt sich das Vorzeichen von $(\partial/\partial\theta)g_4(\theta, \lambda)$ aus demjenigen von $H(\lambda) := 30\lambda^4 - 60\lambda^3 + 30\lambda^2 - 1$. Hieraus folgt: $g_4(\theta, \lambda)$ ist bei festem λ , $0 \leq \lambda < 1$, streng monoton wachsend für $0 \leq \lambda < \lambda_1$ bzw. $\lambda_2 < \lambda < 1$ und streng monoton fallend für $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$.

Ferner gilt

$$g_4(\theta, \lambda_1) = g_4(\theta, \lambda_2) \equiv 30.$$

Dabei bezeichnen

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{15}} \sqrt{15 - 2\sqrt{30}} = 0.24033519$$

und $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ die zwischen 0 und 1 liegenden Nullstellen von $H(\lambda)$. Insgesamt erhält man so

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_{N,\lambda}^2\|_2 &= 1 \quad \text{für } \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2, \\ 1 < \|\mathcal{L}_{N,\lambda}^2\|_2^2 &= \frac{1}{30} g_4\left(\frac{(N-1)\pi}{N}, \lambda\right) < \frac{1}{30\lambda^2(1-\lambda)^2} \\ &\quad \text{für } 0 < \lambda < \lambda_1 \text{ bzw. } \lambda_2 < \lambda < 1 \end{aligned}$$

sowie

$$\|\mathcal{L}_{N,0}^2\|_2^2 = \frac{1}{30} g_4\left(\frac{(N-1)\pi}{N}, 0\right).$$

Abb. 1 zeigt den Verlauf von $(1/30) g_4(\theta, \lambda)$ für $0 \leq \theta \leq \pi$ und verschiedene Werte von λ .

7.

Die einfachen und übersichtlichen Verhältnisse bei quadratischen Splines scheinen nicht ohne weiteres auf Splines höheren Grades übertragbar zu sein. Für $k = 3$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_{N,\lambda}^3\|_2^2 &= \frac{1}{140} \max_{\theta=0(2\pi/N)((N-1)\pi/N)} \\ &\quad \frac{1208 + 1191 \cos \theta + 120 \cos 2\theta + \cos 3\theta}{q(\theta, \lambda)} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} q(\theta, \lambda) &:= (9 - 9\lambda^2 + 8\lambda^3 + 21\lambda^4 - 30\lambda^5 + 10\lambda^6) \\ &\quad + (8 + 12\lambda^2 - 9\lambda^3 - 33\lambda^4 + 45\lambda^5 - 15\lambda^6) \cos \theta \\ &\quad + (1 - 3\lambda^2 + 15\lambda^4 - 18\lambda^5 + 6\lambda^6) \cos 2\theta + \lambda^3(1 - \lambda)^3 \cos 3\theta. \end{aligned}$$

Untersucht man für feste Werte von λ die Graphen der durch

$$h(\theta, \lambda) := \frac{1208 + 1191 \cos \theta + 120 \cos 2\theta + \cos 3\theta}{140q(\theta, \lambda)}$$

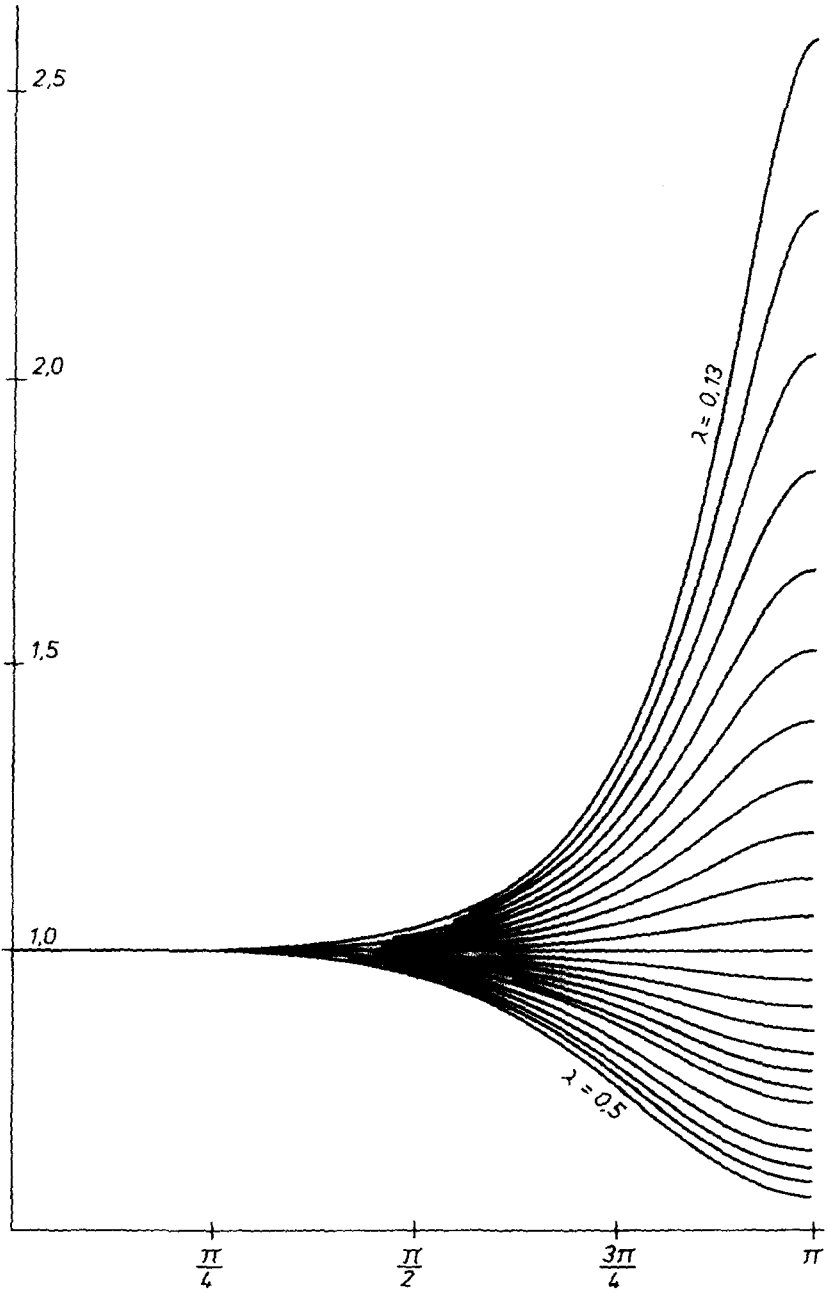


ABB. 1. Graph von $(1/30)g_4(\theta, \lambda)$ für verschiedene Werte von λ , $0.13 \leq \lambda \leq 0.5$.

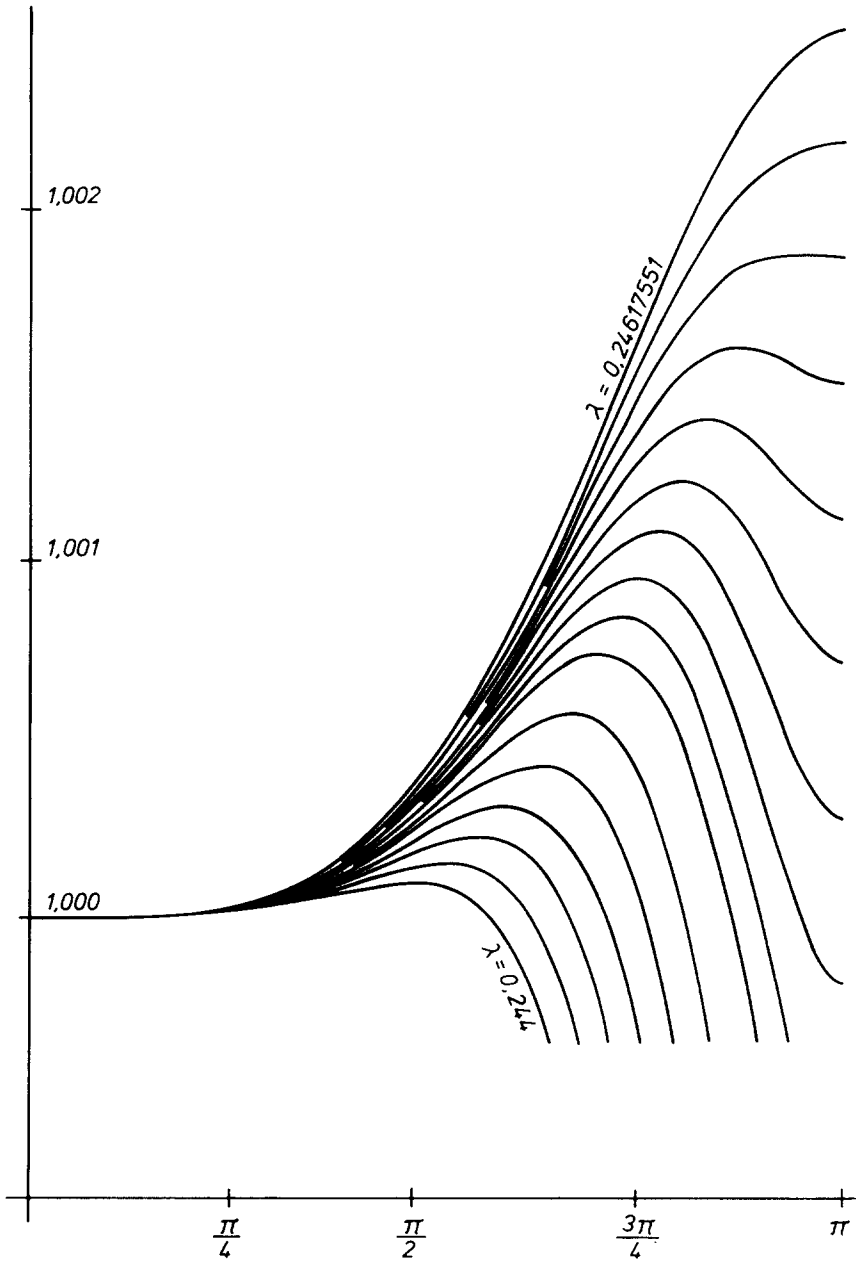


ABB. 2. Graph von $h(\theta, \lambda)$ für verschiedene Werte von λ , $0,244 \leq \lambda \leq 0,24617551$.

gegebenen Funktionenschar, so ergibt sich zunächst qualitativ ein ähnliches Bild wie in Abb. 1, wobei allerdings die Rollen von $\lambda = 0$ und $\lambda = \frac{1}{2}$ vertauscht sind. Eine genauere Analyse zeigt jedoch, daß jetzt (im Gegensatz zum Fall $k = 2$) λ -Werte existieren, für die $h(\theta, \lambda)$ im Intervall $0 \leq \theta \leq \pi$ nicht mehr monoton ist (vgl. Abb. 2). Die Gewinnung allgemeiner Aussagen über das Verhalten von $\|\mathcal{L}_{N,\lambda}^3\|_2$ wird dadurch wesentlich erschwert. Für $0 \leq \lambda < 0.24$ kann man aber $\|\mathcal{L}_{N,\lambda}^3\|_2 = 1$ nachweisen. Ferner gilt für $0.25 \leq \lambda < 0.5$

$$1 < \|\mathcal{L}_{N,\lambda}^3\|_2^2 = h\left(\frac{(N-1)\pi}{N}, \lambda\right) < \frac{17}{35(1-12\lambda^2+8\lambda^3+36\lambda^4-48\lambda^5+16\lambda^6)}$$

und schließlich ist

$$\|\mathcal{L}_{N,1/2}^3\|_2^2 = h\left(\frac{(N-1)\pi}{N}, \frac{1}{2}\right).$$

LITERATUR

1. M. MARSDEN AND R. MUREIKA, Cardinal spline interpolation in L_2 , *Illinois J. Math.* **19** (1975), 145–147.
2. G. MEINARDUS UND G. MERZ, Zur periodischen Spline-Interpolation II, in "Numerische Methoden der Approximationstheorie Band 4" (L. Collatz, G. Meinardus, and H. Werner, Eds.), ISNM 42, S. 204–221, Birkhäuser, Basel, 1978.
3. G. MERZ, Interpolation mit periodischen Spline-Funktionen I, *J. Approx. Theory* **30** (1980), 11–19.
4. G. MERZ, Interpolation mit periodischen Spline-Funktionen II, *J. Approx. Theory* **30** (1980), 20–28.
5. G. MERZ, Normen von Spline-Interpolationsoperatoren, in "Approximation in Theorie und Praxis. Tagungsbericht, Siegen 31.1.–2.2. 1979" (G. Meinardus, Ed.), S. 183–208, Mannheim: Bibliographisches Institut, 1979.
6. F. RICHARDS, Uniform spline interpolation operators in L_2 , *Illinois J. Math.* **18** (1974), 516–521.